

# **Statische Stabilität der Längsbewegung**

Kurzmanuskript

**Prof. Dr.-Ing. Walter Fichter  
Institut für Flugmechanik und Flugregelung  
Universität Stuttgart  
2015**



# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>1 Statische Stabilität der Längsbewegung</b>	<b>1</b>
1.1 Geradeausflug mit Kräfte- und Momenten-Gleichgewicht . . . . .	1
1.2 Aerodynamische Kräfte, Momente und Beiwerte . . . . .	3
1.3 Bedingungen für stationären Flug und statische Stabilität . . . . .	4
1.4 Drehmoment am Flügel und Höhenleitwerk . . . . .	4
1.5 Das Konzept des Neutralpunktes . . . . .	7
1.6 Steuerung und Trimmung . . . . .	8

# 1

## Kapitel 1

# Statische Stabilität der Längsbewegung

## 1.1 Geradeausflug mit Kräfte- und Momenten-Gleichgewicht

Wir betrachten ein Flugzeug in einem Geradeausflug und wir stellen uns die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein kontrollierter (besser: stabiler) Flug überhaupt möglich ist. Bei einem Geradeausflug bewegt sich ein Flugzeug ausschließlich in der Vertikalebene, eine solche Bewegung nennen wir Längsbewegung. Hierbei sind drei Freiheitsgrade beteiligt, nämlich die translatorischen Bewegungen in Vorwärtsrichtung und Vertikalrichtung sowie eine Drehbewegung um die Querachse des Flugzeuges (Nickbewegung), siehe Abbildung 1.1. Die restlichen drei der insgesamt sechs Freiheitsgrade bilden die sogenannte Seitenbewegung, die aus einer translatorischen Bewegung entlang der Querachse sowie Drehbewegungen um die Roll- und Gier-Achse besteht. Wir gehen davon aus, dass das Flugzeug und die Strömungsverhältnisse symmetrisch sind und darum keine Seitenbewegung stattfindet<sup>1</sup>. Ob ein stabiler Flug erreicht wird, hängt damit nun rein an der Längsbewegung. Unter dem Begriff statische Stabilität sei nun verstanden, ob sich eine konstante Fluggeschwindigkeit einstellen kann und ob diese beibehalten werden kann, auch wenn zeitweise Störungen wie z. B. Windböen von außen einwirken.

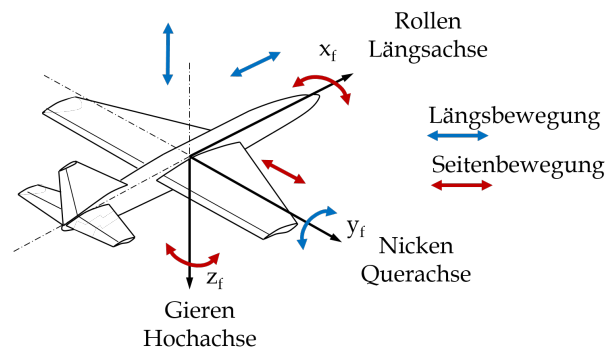


Abbildung 1.1: Freiheitsgrade bei der Längsbewegung.

Um eine konstante Fluggeschwindigkeit zu erhalten, muss am Flugzeug Kräfte- und Momenten-Gleichgewicht vorliegen. In diesem Fall sind die Beschleunigungen, d. h., die Geschwindigkeitsänderungen null. In Abbildung 1.2 ist ein Flugzeug in der Vertikalebene dargestellt. Es sind zwei Koordinatensysteme mit jeweils einer Achse dargestellt, die flugzeugfeste  $x_f$ -Achse und die geodätische  $x_g$ -Achse. Letztere beschreibt die horizontale Ebene auf der Erde. Der Geschwindigkeitsvektor  $V_A$  repräsentiert die Flugrichtung. Der Winkel  $\gamma$  dieses Vektors mit der Horizontalen ist der Bahnneigungswinkel. Für  $\gamma = 0$  ergibt sich ein Horizontalflug. Bei  $\gamma \neq 0$  enthält die Fluggeschwindigkeit eine Vertikalkomponente. Die folgenden Betrachtungen beziehen auch diesen Fall mit ein. Weiterhin können wir Abbildung 1.2 vier Kräfte erkennen. Der aerodynamische Widerstand  $W$  wirkt entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, also entgegengesetzt zur Fluggeschwindigkeit  $V_A$ . Der

<sup>1</sup>Diese Voraussetzung ist zumindest näherungsweise erfüllt, auf Details gehen wir an dieser Stelle jedoch nicht ein.

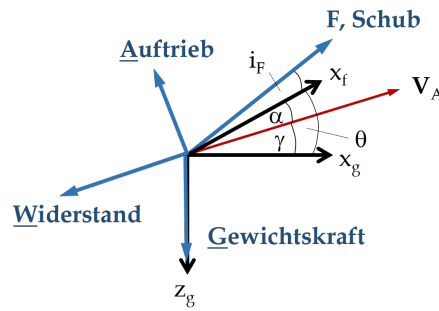


Abbildung 1.2: Bezeichnungen bei der Längsbewegung.

Auftrieb  $A$  ist per Definition senkrecht dazu, also senkrecht zur Anströmung. Die Gewichtskraft wirkt in Richtung Erde senkrecht nach unten. Die Schubkraft  $F$ , d. h., Kraft des Triebwerks wirkt ungefähr entlang der flugzeugfesten Achse, da das Triebwerk üblicherweise mit einem kleinen Einbauwinkel  $i_F$  zur  $x_f$ -Achse eingebaut ist. Nun können wir entsprechend den drei Freiheitsgraden der Längsbewegung zwei Kraftbilanzen und eine Momentenbilanz aufstellen. Die Kraftgleichungen werden entlang der Fluggeschwindigkeitsrichtung und senkrecht dazu formuliert. Es ist

$$-W + \cos(\alpha + i_F)F - G \sin \gamma = 0 \quad (1.1)$$

$$-A - \sin(\alpha + i_F)F + G \cos \gamma = 0. \quad (1.2)$$

Die Momentengleichung beinhaltet die Drehmomente um den Massenmittelpunkt (COM) als Bezugspunkt, d. h.,

$$M = 0. \quad (1.3)$$

Nun beschränken wir uns auf einen wirklichkeitsnahen Fall und berücksichtigen, dass nicht nur der Einbauwinkel  $i_F$  des Triebwerks klein ist, sondern auch der Anstellwinkel  $\alpha$ . Wir setzen daher beide Winkel gleich null. Darüber hinaus betrachten wir kleine Bahnneigungswinkel, d. h., es ist  $\sin \gamma \approx \gamma$  und  $\cos \gamma \approx 1$ . Unter diesen Annahmen erhalten wir drei vereinfachte Gleichungen:

$$-W + F - G\gamma = 0 \quad (1.4)$$

$$-A + G = 0 \quad (1.5)$$

$$M = 0. \quad (1.6)$$

Die erste Gleichung besagt bei einem Horizontalflug ( $\gamma = 0$ ), dass die Schubkraft  $F$  den Widerstand  $W$  kompensieren muss. Aus der zweiten Gleichung erkennen wir, dass der Auftrieb  $A$  so groß sein muss wie die Gewichtskraft  $G$ . Beide Bedingungen leuchten unmittelbar ein. Den erforderlichen Auftrieb erhalten wir praktisch, indem wir den Anstellwinkel  $\alpha$  entsprechend einstellen, denn in gewissen Grenzen gilt, dass der Auftrieb linear mit dem Anstellwinkel ansteigt<sup>2</sup>. Die dritte Gleichung ist die Forderung, dass alle Drehmomente um die Querachse in Summe verschwinden müssen, damit keine Lageänderung stattfindet. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Schubkraft durch den Schwerpunkt geht<sup>3</sup>, so sind dies alle aerodynamischen Drehmomente.

Um einen stationären Flugzustand zu erhalten, muss also bei einem gewünschten  $\alpha$  (der für den Auftrieb

<sup>2</sup>Wird der Anstellwinkel erhöht, so vergrößert sich der Auftrieb.

<sup>3</sup>Falls dies nicht der Fall sein sollte, ändert sich im Prinzip nichts an den folgenden Erläuterungen, das Schubmoment muss eben nur durchgehend berücksichtigt werden.

notwendig ist) das Drehmoment um die Nickachse verschwinden. Nun stellt sich die Frage was passiert, wenn etwa durch Windstörungen ein Anstellwinkel entsteht, der von nominalen Wert abweicht. Aus der Anschauung heraus müssen wir fordern, dass bei einem größeren Anstellwinkel (als dem gewünschten) ein negatives Drehmoment entsteht, damit das Flugzeug wieder auf den gewünschten Anstellwinkel zurückgedreht wird. Umgekehrt gilt dies natürlich auch für kleinere Anstellwinkel, bei dem sich entsprechend ein positives Drehmoment einstellen muss. In Abbildung 1.3 ist dies anschaulich dargestellt. Das Drehmoment, das aus der Abweichung vom nominalen Anstellwinkel entsteht, muss also eine rückstellende Wirkung haben. Mathematisch entspricht diese Forderung der Bedingung, dass die Ableitung des Drehmoments nach  $\alpha$  negativ sein muss.

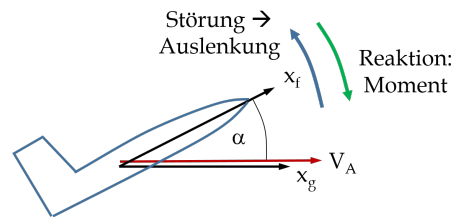


Abbildung 1.3: Rückstellendes Drehmoment um die Nickachse.

## 1.2 Aerodynamische Kräfte, Momente und Beiwerte

Um die oben beschriebenen Gleichgewichte auszuwerten, werden Modelle für die aerodynamischen Kräfte und Momente mithilfe der aerodynamischen Beiwerte definiert. Es ist:

$$A = \frac{1}{2} \rho V_A^2 S C_A \quad (1.7)$$

$$W = \frac{1}{2} \rho V_A^2 S C_W \quad (1.8)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V_A^2 S \bar{c} C_m. \quad (1.9)$$

Hierbei ist  $S$  die Flügelfläche,  $\bar{c}$  die mittlere Flügeltiefe und  $\bar{q} = 1/2 \rho V_A^2$  ist der Staudruck.  $C_A$ ,  $C_W$  und  $C_m$  sind aerodynamische Beiwerte, die von der Geometrie, der Anströmungsrichtung (also  $\alpha$ ) sowie der Reynoldszahl und der Machzahl abhängen. Diese Gleichungen können wir auch jeweils nach den Beiwerten auflösen und diese dann als normierte Kräfte und Momente verstehen. Wir erhalten also

$$C_A = \frac{A}{\frac{1}{2} \rho V_A^2 S} \quad (1.10)$$

$$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V_A^2 S} \quad (1.11)$$

$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_A^2 S \bar{c}}. \quad (1.12)$$

Im Folgenden werden wir hauptsächlich mit diesen Größen weiter, statt mit den eigentlichen Kräften und Momenten.

Hinsichtlich des Auftriebs machen wir nun noch eine Modellannahme, nämlich dass er sich zusammensetzt aus einem konstanten Anteil und einem Anteil, der sich linear mit dem Anstellwinkel vergrößert. Diese Annahme gilt sowohl für den Flügel als auch für das Höhenleitwerk und wie wir sehen werden, auch für das gesamte Flugzeug.

### 1.3 Bedingungen für stationären Flug und statische Stabilität

Mit den oben definierten Beiwerten, d. h., mit den normierten Kräften und Momenten, können wir nun die Bedingungen für den stationären Flug und dessen Stabilität formulieren. Wir bezeichnen mit  $\alpha_0$  den Anstellwinkel, bei dem gerade der erforderliche Auftrieb (=Gewichtskraft) erzeugt wird. Bei genau diesem  $\alpha_0$  muss *Momentengleichgewicht* herrschen, d. h., es muss sein

$$C_m(\alpha_0) = 0. \quad (1.13)$$

Um ein rückstellendes Drehmoment zu erhalten, muss die Ableitung  $C_{m\alpha} = \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$  negativ sein. Es muss also gelten

$$C_{m\alpha} < 0. \quad (1.14)$$

Diese zweite Forderung wird üblicherweise als Bedingung für *statische Stabilität* bezeichnet.

Um überhaupt einen stationären Auftrieb zu erzeugen, muss bei Auftrieb null ein aufnickendes Drehmoment vorhanden sein, d. h.

$$C_m(C_A = 0) > 0. \quad (1.15)$$

In manchen Literaturquellen werden auch beide Forderungen (1.14) und (1.15) zusammen als Bedingung für statischen Stabilität bezeichnet.

In Abbildung 1.4 ist ein typischer Verlauf des Drehmomentenbeiwerts  $C_m(\alpha)$  über dem Anstellwinkel  $\alpha$  dargestellt, zusammen mit den entsprechenden Größen  $\alpha_0$ ,  $C_{m\alpha}$ ,  $C_m(\alpha = 0)$ . Hier ist Vorsicht geboten, den  $C_m(C_A = 0)$  und  $C_m(\alpha = 0)$  sind nicht notwendigerweise identisch.

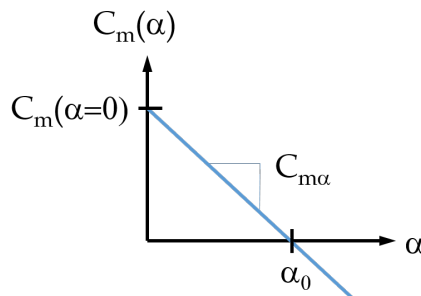


Abbildung 1.4: Drehmoment-Verlauf bei einer rückstellenden Wirkung.

### 1.4 Drehmoment am Flügel und Höhenleitwerk

In diesem Abschnitt werden nun die Gleichungen für  $C_m$  und  $C_{m\alpha}$  jeweils für Flügel und Höhenleitwerk hergeleitet. Danach werden beide Beiträge zusammengefasst und diskutiert. So erhalten wir Vorschriften, die bei der Auslegung eines Flugzeuges nützlich sind.

#### Flügel

In Abbildung 1.5 ist eine Tragfläche bezüglich der flugzeugfesten  $x_f$ -Achse skizziert. Am Flügel (Superskript (F)) greifen Auftrieb  $A^{(F)}$ , Widerstand  $W^{(F)}$  und das aerodynamische Drehmoment  $M_{A,AC}^{(F)}$  bezüglich des Flügel-Referenzpunktes  $AC$  (engl. aerodynamic center) an. Hieraus können wir das Drehmoment um die Querachse formulieren. Es ist

$$M_{A,COM}^{(F)} = A^{(F)} \cos(\alpha_F - i_F)(x_{COM} - x_{AC}) + W^{(F)} \sin(\alpha_F - i_F)(x_{COM} - x_{AC}) + A^{(F)} \sin(\alpha_F - i_F)z_{COM} - W^{(F)} \cos(\alpha_F - i_F)z_{COM} + M_{A,AC}^{(F)}. \quad (1.16)$$

Dividiert man diese Gleichung durch  $\frac{1}{2}\rho V_A^2 S \bar{c}$ , so erhält man die Drehmomentenbilanz des Flügels ausgedrückt in Beiwerten:

$$C_{m,COM}^{(F)} = C_A^{(F)} \cos(\alpha_F - i_F) \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right) + C_W^{(F)} \sin(\alpha_F - i_F) \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right) + C_A^{(F)} \sin(\alpha_F - i_F) \frac{z_{COM}}{\bar{c}} - C_W^{(F)} \cos(\alpha_F - i_F) \frac{z_{COM}}{\bar{c}} + C_{m,AC}^{(F)}. \quad (1.17)$$

Aufgrund der Größen- und Hebel-Verhältnisse ist nur der erste und letzte Term relevant, alle anderen Terme sind vernachlässigbar. Da der Winkel  $\alpha_F - i_F$  relativ klein ist setzen wir außerdem  $\cos(\alpha_F - i_F) = 1$  und erhalten einen deutlich einfacheren Ausdruck

$$C_{m,COM}^{(F)} = C_{m,AC}^{(F)} + C_A^{(F)} \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right). \quad (1.18)$$

Der Auftrieb ist linear vom Anstellwinkel abhängig, d. h., es ist  $C_A^{(F)} = C_{A0}^{(F)} + C_{A\alpha}^{(F)} \alpha_F$ . Dies können wir in Gleichung (1.18) einsetzen und erhalten

$$C_{m,COM}^{(F)} = \underbrace{C_{m,AC}^{(F)} + C_{A0}^{(F)} \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right)}_{C_{m0}^{(F)}} + \underbrace{C_{A\alpha}^{(F)} \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right)}_{C_{m\alpha}^{(F)}} \alpha_F, \quad (1.19)$$

was einem Ausdruck der Form  $C_{m,COM}^{(F)} = C_{m0}^{(F)} + C_{m\alpha}^{(F)} \alpha_F$  entspricht. Nun können wir abschätzen, ob durch den Tragflügel alleine statische Stabilität erreicht werden kann. Die Bedingung  $C_{m\alpha} < 0$  kann durch  $x_{COM} < x_{AC}$  erfüllt werden, d. h., wenn sich der Schwerpunkt vor dem Neutralpunkt des Flügels befindet. Bedingung (1.14) ist in diesem Fall also erfüllt. Für den Nullauftrieb verschwindet der zweite und dritte Term in (1.19) per Definition und es ist  $C_m(C_A = 0) = C_{m,AC}^{(F)}$ . Üblicherweise ist  $C_{m,AC}^{(F)} < 0$ , d. h., bei Nullauftrieb würde ein Abnicken erfolgen. Bedingung (1.15) kann also nicht erfüllt werden. Darum ist ein Tragflügel alleine üblicherweise nicht statisch stabil. Das Höhenleitwerk hilft uns jedoch weiter.

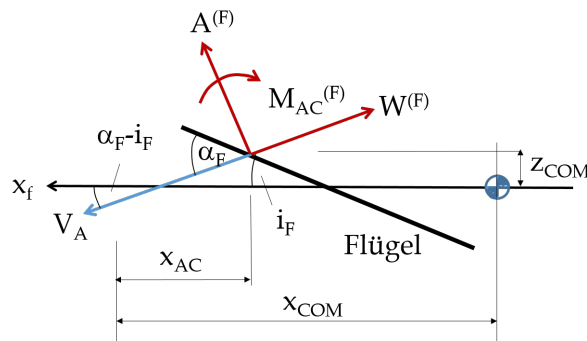


Abbildung 1.5: Geometrie und Kräfte am Flügel.



## Höhenleitwerk

In Abbildung 1.6 ist die Geometrie des Höhenleitwerks dargestellt. Der Einbauwinkel gegenüber der flugzeugfesten  $x_f$ -Achse ist  $i_H$ . Es greifen Auftrieb  $A^{(H)}$ , Widerstand  $W^{(H)}$  und Drehmoment  $M_{A,AC}^{(H)}$  am Referenzpunkt des Höhenleitwerks an. Die Anströmung ist aufgrund des lokalen Abwindes (engl. downwash) gegenüber dem Tragflügel um den Abwindwinkel  $\epsilon$  verändert.

Nun führen wir eine ganz ähnliche Rechnung wie oben für das Höhenleitwerk durch. Es wird sich zeigen, dass gerade dieser Einfluss zu einem (statisch) stabilen Flugzustand führt. Das Drehmoment um den Massenmittelpunkt aufgrund der Kräfte und Momente am Höhenleitwerk ist

$$M_{A,COM}^{(H)} = -x_H(A^{(H)} \cos(\alpha_{xf} - \epsilon) + W^{(H)} \sin(\alpha_{xf} - \epsilon)) - z_H(W^{(H)} \cos(\alpha_{xf} - \epsilon) - A^{(H)} \sin(\alpha_{xf} - \epsilon)) + M_{A,AC}^{(H)}. \quad (1.20)$$

Der Winkel  $\alpha_{xf} - \epsilon$  ist der Winkel zwischen der  $x_f$ -Achse und der Geschwindigkeit  $V'_A$  am Höhenleitwerk. Aufgrund der Hebel- und Größenverhältnisse<sup>4</sup> können wir auch hier die meisten Terme vernachlässigen und das Drehmoment durch  $M_{A,COM}^{(H)} = -x_H A^{(H)}$  annähern. Da gilt  $A^{(H)} = \bar{q}_H S_H C_A^{(H)}$  folgt daraus

$$M_{A,COM}^{(H)} = -x_H C_A^{(H)} \bar{q}_H S_H. \quad (1.21)$$

Dividiert man diese Gleichung durch  $\bar{q} S \bar{c}$ , wobei sich diese drei Parameter auf den Flügel beziehen, so erhält man

$$C_{m,COM}^{(H)} = -\frac{x_H S_H \bar{q}_H}{S \bar{c}} \frac{C_A^{(H)}}{\bar{q}}. \quad (1.22)$$

Nun führen wir zwei neue Abkürzungen ein.  $\eta_H$  sei das Verhältnis  $\frac{\bar{q}_H}{\bar{q}}$  der Staudrücke von Höhenleitwerk und Flügel. Es beschreibt, welchen Effekt die lokale Anströmung des Höhenleitwerks gegenüber dem Flügel hat, z. B. durch den Propeller. Die Größe  $\frac{x_H S_H}{S \bar{c}}$  kürzen wir mit  $V_H$  ab und nennen es Volumenkoeffizient oder Volumenverhältnis, da jeweils im Zähler und Nenner eine Größe mit der Einheit eines Volumens steht. Mit diesen Vereinbarungen kann man schreiben

$$C_{m,COM}^{(H)} = -\eta_H V_H C_A^{(H)}. \quad (1.23)$$

Um jetzt zu der gewünschten Beschreibung  $C_{m,COM}^{(H)} = C_{m0}^{(H)} + C_{m\alpha}^{(H)} \alpha_F$  zu kommen, müssen wir den Höhenleitwerksauftrieb entsprechend ausdrücken. Dazu nehmen wir ein Auftriebsmodell der Form

$$C_A^{(H)} = C_{A\alpha}^{(H)} \alpha_H = C_{A\alpha}^{(H)} (\alpha_F - i_F - \epsilon + i_H) \quad (1.24)$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{d\epsilon}{d\alpha} \alpha_F \quad (1.25)$$

an. Es bedeutet, dass der Auftrieb linear mit dem Anstellwinkel  $\alpha_H$  ansteigt und der Abwindwinkel neben einem konstanten Anteil auch vom Anstellwinkel des Flügels abhängt. Beides sind sinnvolle Annahmen. Setzen wir dies in die Gleichung (1.23) für den Momentenbeiwert ein, so erhalten wir nach einer Gruppierung von konstanten Termen und solchen, die linear von  $\alpha_F$  abhängen:

<sup>4</sup>Für symmetrische Profile ist insbesondere  $M_{A,AC}^{(H)} (C_{AH} = 0) = 0$ .

$$C_{m,COM}^{(H)} = \underbrace{-\eta_H V_H C_{A\alpha}^{(H)} (i_H - i_F - \epsilon_0)}_{C_{m0}^{(H)}} - \underbrace{\eta_H V_H C_{A\alpha}^{(H)} \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)}_{C_{m\alpha}^{(H)}} \alpha_F. \quad (1.26)$$

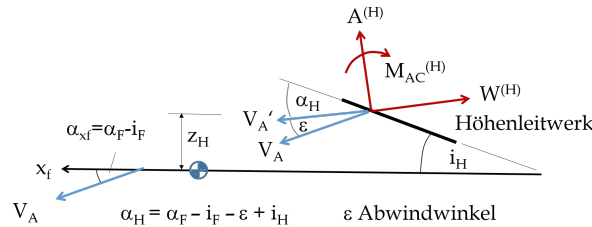


Abbildung 1.6: Geometrie und Kräfte am Höhenleitwerk.

## Diskussion

Die für die statische Stabilität formulierten Bedingungen gelten nicht für Flügel und Höhenleitwerk getrennt, sondern für die Gesamtwerte des Flugzeuges, also für  $C_{m\alpha} = C_{m\alpha}^{(F)} + C_{m\alpha}^{(H)}$ . Mit den entsprechenden Beiträgen aus den Gleichungen (1.19) und (1.26) ergibt sich folgende Beschreibung:

$$C_{m,COM} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_F \quad (1.27)$$

mit

$$C_{m0} = C_{m,AC}^{(F)} + C_{A0}^{(F)} \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right) + \eta_H V_H C_{A\alpha}^{(H)} (\epsilon_0 + i_F - i_H). \quad (1.28)$$

$$C_{m\alpha} = C_{A\alpha}^{(F)} \left( \frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{AC}}{\bar{c}} \right) - \eta_H V_H C_{A\alpha}^{(H)} \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right). \quad (1.29)$$

Um die Bedingung  $C_m(C_A = 0) \geq 0$  zu analysieren, betrachten wir den ersten und dritten Term in Gleichung (1.28). Da die Anteile vom Flügel allein, d. h., dem ersten Term üblicherweise negativ sind, muss der Beitrag des Höhenleitwerks, d. h., der dritte Term positiv sein. Den gewünschten positiven Beitrag können wir erhalten, wenn wir  $i_H$  entsprechend negativ machen. Das bedeutet, dass das Höhenleitwerk keinen Auftrieb, sondern einen Abtrieb erzeugt, was ja anschaulich notwendig für ein positives Drehmoment ist. Dies ist notwendig für die Fluglage *bei Auftrieb null*.

Die Bedingung  $C_{m\alpha} < 0$  kann zum einen durch die Terme des Flügels beeinflusst werden, d. h., die Lage des Schwerpunkts, andererseits durch die Auslegung des Höhenleitwerks mithilfe der Parameter  $V_H$  und  $C_{A\alpha}^{(H)}$ .

## 1.5 Das Konzept des Neutralpunktes

Der Parameter  $C_{m\alpha}$  des gesamten Flugzeuges, also die Kombination aus Flügel und Leitwerk, lässt sich auch mithilfe des sogenannten Neutralpunktes beschreiben. Dies erlaubt eine recht einfache Interpretation der statischen Stabilität, wie wir im Folgenden sehen werden.

Zunächst fragen wir uns, wo der Schwerpunkt liegen muss, damit  $C_{m\alpha} = 0$  wird. Die Bedeutung dieser Frage kann man sich folgendermaßen überlegen. Wenn sich der Anstellwinkel ändert, so ändert sich sicherlich auch der Auftrieb, es gibt z. B. einen *Zusatzauftrieb* bei einer Erhöhung von  $\alpha$ . Wenn sich das Drehmoment bei einer solchen Anstellwinkeländerung nicht ändert, d. h. also, wenn  $C_{m\alpha} = 0$  ist, so bedeutet dies, dass der *Zusatzauftrieb* offensichtlich momentenfrei. Der Zusatzauftrieb greift damit genau an diesem Punkt an. Diesen

Punkt nennen wir Neutralpunkt  $x_{NP}$ . Um ihn auszurechnen setzen wir die Gleichung (1.29) null, lösen nach  $x_{COM} = x_{NP}$  auf und erhalten

$$\frac{x_{NP}}{\bar{c}} = \frac{x_{AC}}{\bar{c}} + \eta_H V_H \frac{C_{A\alpha}^H}{C_{A\alpha}^F} \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right) \quad (1.30)$$

Diesen Ausdruck können wir wiederum nach  $\frac{x_{AC}}{\bar{c}}$  auflösen und in die Gleichung (1.29) einsetzen. Damit ergibt sich ein einfacher Ausdruck für  $C_{m\alpha}$  in der Form

$$C_{m\alpha} = \left(\frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{NP}}{\bar{c}}\right) C_{A\alpha}^{(F)}. \quad (1.31)$$

Die Bedingung für statische Stabilität ist erfüllt, wenn gilt  $x_{NP} > x_{COM}$ . D. h., der Neutralpunkt muss hinter dem Schwerpunkt liegen. Mit anderen Worten: wenn ein Flugzeug aufnickt, muss der dadurch entstehende Zusatzauftrieb hinter dem Schwerpunkt angreifen. So entsteht dann ein rückstellendes Drehmoment, was anschaulich gerade die Bedingung für statische Stabilität ist. Der Neutralpunkt bei einer gegebenen Flugzeugkonstruktion eine feste Größe ist, er ändert sich also beispielsweise nicht durch Änderung der Masse oder der Massenverteilung.

Der Abstand  $\frac{x_{COM}}{\bar{c}} - \frac{x_{NP}}{\bar{c}}$  ist ein Maß für den Abstand zur Grenzstabilität beziehungsweise Instabilität und wird auch als *statische Stabilitätsreserve* bezeichnet.

## 1.6 Steuerung und Trimmung

### Möglichkeiten der Steuerung

Bisher haben wir die Bedingungen für statische Stabilität diskutiert und dabei vorausgesetzt, dass ein fester nominaler Anstellwinkel  $\alpha_0$  gegeben ist. In der Praxis muss  $\alpha_0$  natürlich im Flug eingestellt werden können, was die folgende beispielhafte Überlegung zeigt. Gehen wir einmal von einem Horizontalflug aus, d. h., einem Flug mit Bahnneigungswinkel  $\gamma = 0$ . Dann gilt, dass der Auftrieb genau die Gewichtskraft kompensieren muss. Der Auftrieb hängt jedoch nicht nur vom Anstellwinkel, sondern u. a. auch von der Fluggeschwindigkeit ab. Soll also beispielsweise die Fluggeschwindigkeit vergrößert werden, so muss der nominale Anstellwinkel verkleinert werden und umgekehrt.  $\alpha_0$  dient also zur Steuerung.

Eine erste Möglichkeit zur Einstellung des nominalen Anstellwinkels überlegen wir uns zunächst mathematisch und zwar mithilfe der Abbildung 1.7. Ändern wir die Steigung der Kennlinie  $C_m(\alpha)$ , so beeinflussen wir damit den Schnittpunkt mit der x-Achse, also gerade der Wert  $\alpha_0$ . Praktisch ist dies durch Veränderung des Massenmittelpunktes möglich, was wir aus Gleichung (1.29) ablesen können. Dieses Verfahren verwenden Drachenflieger, für Flugzeuge ist es jedoch nicht gut geeignet.

Eine zweite Methode liegt anschaulich auf der Hand: wir verändern die Einstellung des Höhenleitwerks beziehungsweise eines Höhenruders. In diesem Fall wird zunächst die Auftriebsgleichung des Höhenruders (1.24) erweitert durch den Einfluss von  $\eta$ , der Höhenrudereinstellung. Es ist dann

$$C_A^{(H)} = C_{A\alpha}^{(H)} \alpha_H + C_{A\eta}^{(H)} \eta \quad (1.32)$$

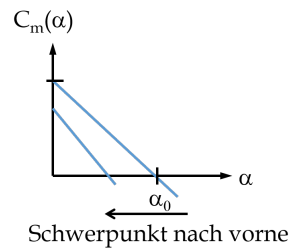
$C_{A\eta}$  ist die Ruderwirksamkeit des Höhenruders. Die Momentengleichung (1.26) ändert sich entsprechend zu

$$C_{m,COM}^{(H)} = \underbrace{-V_H \eta_H C_{A\alpha}^{(H)} (i_H - i_F - \epsilon_0)}_{C_{m0}^{(H)}} \underbrace{-V_H \eta_H C_{A\alpha}^{(H)} \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right)}_{C_{m\alpha}^{(H)}} \alpha_F - V_H \eta_H C_{A\eta}^{(H)} \eta. \quad (1.33)$$

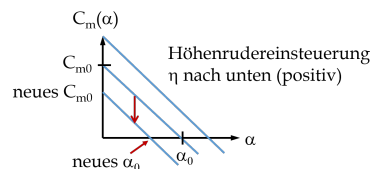
Der Zusatzterm  $-V_H \eta_H C_{A\eta}^{(H)} \eta$  entspricht einer vertikalen Verschiebung der Momentenkennlinie, siehe Abbildung 1.8. Nach Gleichung (1.33) bewirkt ein positiver Ausschlag des Höhenruders (also nach unten) ein

negatives Moment, was anschaulich in Abbildung 1.9 dargestellt ist. Die Gesamtkurve in Abbildung 1.8 wird dadurch nach unten verschoben.

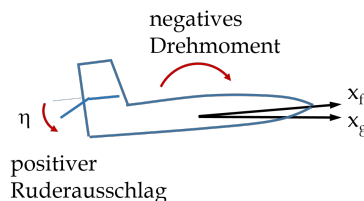
Bei einem gegebenen  $\alpha_0$  kann die zugehörige Einstuerung  $\eta$  des Höhenruders ausgerechnet werden, indem die Gleichung (1.33) zu null gesetzt wird.



**Abbildung 1.7:** Momentenkennlinie bei Veränderung des Massenmittelpunktes.



**Abbildung 1.8:** Verschiebung der Momentenkennlinie durch Höhenrudereinstuerung.



**Abbildung 1.9:** Positive Höhenrudereinstuerung bewirkt negatives Zusatzmoment.

## Trimmrechnung für einen stationären Flugzustand

Die Trimmrechnung ist die Berechnung von konstanten Steuerungen<sup>5</sup>, so dass sich ein gewünschter stationärer Flugzustand einstellt. Dabei gehen wir von einem statisch stabilen Flugzeug aus<sup>6</sup>. Wir suchen nun entsprechende Werte für den Anstellwinkel  $\alpha_F$ , die Höhenrudereinstuerung  $\eta$  sowie die erforderliche Schubkraft  $F$  durch das Triebwerk, also im Prinzip die Schubhebelstellung. Um sie zu berechnen, nutzt man die drei Kräftegleichgewichte aus (1.4). Neben der Vorgabe des gewünschten Flugzustands benötigen wir darum einige Flugzeugparameter, mit denen wir die aerodynamischen Kräfte und Momente ausdrücken können. Wir gehen daher von folgenden Vorgaben aus:

- Die gewünschte Fluggeschwindigkeit und Flughöhe sind vorgegeben. Diese Angaben entsprechen einem Punkt innerhalb der Flugbereichsgrenzen (Flugenvelope). Durch die Angabe der Flughöhe ist auch die Luftdichte bekannt.
- Die Flugzeugparameter  $G$  (Masse) und Bezugsfläche  $S$  der Flügel seien bekannt.
- Die aerodynamischen Parameter zur Berechnung des Auftriebs- und Momentenbeiwertes seien gegeben. Dies sind die Parameter  $C_{A0}$ ,  $C_{A\alpha}$ ,  $C_{A\eta}$  sowie  $C_{m0}$ ,  $C_{m\alpha}$ ,  $C_{m\eta}$ .

<sup>5</sup>Im Flug ist es die Trimmung, also die Einstellung der Steuerungen durch den Piloten.

<sup>6</sup>Dies können wir mit den oben dargestellten Methoden überprüfen und ggf. den Entwurf dahingehend beeinflussen.

Die aerodynamischen Parameter beziehen sich auf das gesamte Flugzeug. Sie werden dazu verwendet, Modellgleichungen für den Auftrieb und das Nickmoment des gesamten Flugzeugs in Form von Beiwerten zu formulieren. Diese Modellgleichungen haben folgende Form:

$$C_A = C_{A0} + C_{A\alpha}\alpha_F + C_{A\eta}\eta, \quad (1.34)$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_F + C_{m\eta}\eta. \quad (1.35)$$

Die Modelle beschreiben also in linearer Weise den Einfluss von Anstellwinkel  $\alpha_F$  und Einsteuerung  $\eta$  des Höhenruders. Zunächst überlegen wir uns für alle der oben angegebenen aerodynamischen Parameter, wie sie mit den uns bekannten Parametern für Flügel (Superskript ( $F$ )) und Höhenleitwerk (Superskript ( $H$ )) zusammenhängen.

Die Parameter des aerodynamischen Drehmoments des gesamten Flugzeugs haben wir bereits kennengelernt:  $C_{m0}$  und  $C_{m\alpha}$  sind durch die Gleichungen (1.28) und (1.29) gegeben.  $C_{m\eta}$  ist dem letzten Term in (1.33) entnommen.

Bei den Auftriebsparametern müssen wir die Anteile von Flügel, Höhenleitwerk und den Einfluss von Höhenruder noch zusammenfassen. Dabei müssen wir eine kurze Umrechnungen vornehmen, denn die Höhenleitwerkseinflüsse, d. h., alle Parameter mit Superskript ( $H$ ) müssen nun auch auf die Fläche  $S$  und der Staudruck  $\bar{q}$  des Flügels bezogen werden. Der Zusatzauftrieb durch die Höhenrudereinstellung ist  $\Delta L = C_{A\eta}\bar{q}S\eta = C_{A\eta}^{(H)}\bar{q}_H S_H \eta$ . Hierbei ist  $C_{A\eta}$  bezogen auf den Staudruck und die Fläche des Flügels,  $C_{A\eta}^{(H)}$  ist bezogen auf den Staudruck und die Fläche des Höhenleitwerks. Als Umrechnungsvorschrift ergibt sich daher:

$$C_{A\eta} = \frac{\bar{q}_H}{\bar{q}} \frac{S_H}{S} C_{A\eta}^{(H)} = \eta_H \frac{S_H}{S} C_{A\eta}^{(H)} \eta. \quad (1.36)$$

Für den Parameter  $C_{A\alpha}^{(H)}$  erfolgt die Umrechnung auf ähnliche Weise und wird erhalten für den Auftriebsbeitrag des Höhenleitwerks, bezogen auf die Flügelparameter den Ausdruck  $\eta_H \frac{S_H}{S} C_{A\alpha}^{(H)} \alpha_H$ . Mit dem Modell (1.24) kann der Anstellwinkel  $\alpha_H$  ersetzt werden und es ergeben sich dann zusammengefasst die Parameter

$$C_{A0} = C_{A0}^{(F)} + \eta_H \frac{S_H}{S} C_{A\alpha}^{(H)} (i_H - i_F - \epsilon_0) \quad (1.37)$$

und

$$C_{A\alpha} = C_{A\alpha}^{(F)} + \eta_H \frac{S_H}{S} C_{A\alpha}^{(H)} \left(1 + \frac{d\epsilon}{d\alpha}\right). \quad (1.38)$$

Nun zur eigentlichen Trimmrechnung, d.h zur Bestimmung der unbekanntenen Größen  $\alpha_0$ ,  $\eta$  und  $F$ . Die erforderlichen Gleichungen liefern die Kräftegleichgewichte (1.4). Vereinfacht können wir sagen, dass der Anstellwinkel  $\alpha_0$  den erforderlichen Auftrieb liefern muss, die Höhenrudersteuerung  $\eta$  das Momentengleichgewicht sicherstellt und die Schubkraft dafür sorgt, dass den Widerstand kompensiert wird. Dies ist allerdings eine sehr grobe Sichtweise. Im Allgemeinen sind die drei Gleichungen miteinander verkoppelt.

Die Schubkraft  $F$  taucht offensichtlich nur in der ersten Gleichung auf, dadurch können wir diese Gleichung als Bestimmungsgleichung für  $F$  auffassen und von den beide anderen abspalten. Momentengleichgewicht und die Auftriebsgleichgewicht schreiben wir nun mit normierten Kräften und Momenten. Es ist

$$-C_{A0} - C_{A\alpha}\alpha_F - C_{A\eta}\eta + \frac{G}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = 0 \quad (1.39)$$

$$C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_F + C_{m\eta}\eta = 0. \quad (1.40)$$

In beiden Gleichungen tauchen  $\alpha$  und  $\eta$  auf, wir müssen diese also gleichzeitig lösen. Dazu fassen wir die beiden Gleichungen in Matrixschreibweise zusammen:

$$\begin{bmatrix} C_{A\alpha} & C_{A\eta} \\ C_{m\alpha} & C_{m\eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{G}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - C_{A0} \\ -C_{m0} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Auflösen nach dem Vektor mit den beiden Unbekannten ergibt

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{m\eta} & -C_{A\eta} \\ -C_{m\alpha} & C_{A\alpha} \end{bmatrix} \frac{1}{C_{A\alpha}C_{m\eta} - C_{m\alpha}C_{A\eta}} \begin{pmatrix} \frac{G}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - C_{A0} \\ -C_{m0} \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Für die Einsteuerung des Höhenruders können wir also aus der zweiten Zeile ablesen:

$$\eta = -\frac{C_{m\alpha}(\frac{G}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - C_{A0}) + C_{A\alpha}C_{m0}}{C_{A\alpha}C_{m\eta} - C_{m\alpha}C_{A\eta}} \quad (1.43)$$

Entsprechend kann eine Lösung für den Anstellwinkel aus der ersten Zeile von (1.42) ausgerechnet werden.